

Data Structures and algorithms

Instructor : Dr.Amin Eskandari

Head-Ta's : Hamid Namjoo manesh , Amir Hossein Hemati , Ali Mojahed
Ta's : Amir Mohammad Asadjoo , Padina razmjooi , Armin Janfaza , Alireza Heydari , Mahdi Torabi ,
Maryam Ghorbani , Fatemeh Keshavarz , MohammadReza Fasli , Abolfazl Tadrissi

سوالات آزمون شماره ۴

۴ سوال – ۱ ساعت و ۵۵ دقیقه زمان

سوال اول :

شما که در حال حاضر دانشجوی مهندسی کامپیوتر هستید و در حال یادگیری درس شیرین و آسون DSA هستید

به صورت اتفاقی در طبقه همکف ساختمان مهندسی ۱ در یکی از اتاق های مرموز سرویس بهداشتی یک ماشین زمان پیدا میکنید که جزو دارایی های Zach Galifianakis میباشد.

از انجایی که آقای نامجو(us Namjoo) و جناب Zach Galifianakis در حال خواندن کتاب The World's Greatest BlackJack Book هستند متوجه حضور شما نمیشوند و شما وارد ماشین زمان میشوید



در طول مسیر خود متوجه میشوید که این یک ماشین زمان معمولی نیست و کسی به اسم PABLO با شما صحبت میکنه و به شما میگه که قرار شمارو به دو تایم لاین 1960 و 1970 ببره و از شما یک سری تسک ها میخواهد

۱. شما به سال 1960 که رسیدید باید با دانشمند محترم Fernando Corbató ملاقات کنید و به اون کمک کنید که جایزه تورینگ رو بدست بیاورد اما چطوری ؟
آقای Corbató میخواست با استفاده از یک الگوریتم کاری کند که وقتی CPU تصمیم به اجرای یک برنامه میگیره بهینه عمل کنه به طور مثال اگر قرار بر این بود که مثلا یک کد کوتاه تست بشه نیاز نباشد که ساعت ها در صف انتظار باشیم چون کامپیوتر ها در اون زمان مثل الان توانایی انجام چند کار باهم را نداشتند، شما باید الگوریتم مناسب برای این کار رو برای او نام ببرید.

۲. از اون جایی که فقط گفتن نام دردی رو درمان نمیکنه شما باید این الگوریتم رو توضیح بدید تا آقای دانشمند ما ببینه که بچه های DSA چقدر پتانسیل بالایی دارند (سعی کنید کامل و با نکات ریز باشه).

۳. در سفر بعدی شما به سال 1970 میروید جایی که تغییراتی به وجود اومده.
شما متوجه میشوید که در دانشگاه MIT همانجایی که تمام این اتفاق ها با کمک دانشمند خفتمون شروع شده فهمیدند که الگوریتم ما گشنه شده و هرکاری میکنیم این شکمش آروم نمیشه، اینجاست که دوباره شما باید از جیبتون یک برگ برنده جدید آزاد کنید و یک اسم جدید بکوید روی میز.

۴. یک بچه درس خوان MIT ای قبل اینکه شما سوسکی فرار کنید و راحت باشید یک سوال میپرسه که باعث نبض زدن پلک شما میشه (حالا این الگوریتم جدید چیه ؟) شما که نمیخواین PABLO اذیت بشه ؟ پس جواب بدید.



راهنمایی: ویدیو آموزشی فصل 4

PABLO BLESS YOU ALL

سوال دوم :

یک درخت دودویی با مقادیر [15,9,3,12,7,20,17,25] داریم.

الف) این اعداد را به ترتیب داده شده در یک BST درج کنید. سپس پیمایش inorder درخت را بنویسید و LCA (پایین ترین جد مشترک) دو گره ۷ و ۱۷ را با ذکر مراحل پیدا کنید.

ب) همین لیست را با روش bubble_down به یک Max-Heap تبدیل کنید. آرایه نهایی هرم را بنویسید و پیچیدگی زمانی این روش را بنویسید.

ج) فرض کنید پیمایش preorder یک درخت دودویی [15,9,3,7,12,20,17,25] و پیمایش inorder آن [3,7,9,12,15,17,20,25] باشد. با استفاده از منطق تابع change_order جزوه، پیمایش postorder این درخت را بدست آورید.

سوال سوم :



قیام ورکوتا

در سال ۱۹۶۳، اردوگاه کار اجباری ورکوتا ویکتور رزناف، به همراه دوستش الکس میسون و تعداد زیادی از زندانیان دیگر، در حال طرح‌ریزی یک فرار بزرگ و جسورانه است. در این اردوگاه، n زندانی وجود دارند که ما آن‌ها را با $p_1, p_2, \dots, p_n$ شماره‌گذاری می‌کنیم. برای سادگی، فرض کنید n توانی از ۲ است ($n = 2^k$).

نقشه فرار در چند مرحله اجرا می‌شود و نیازمند هماهنگی و اتحاد گروه‌های کوچک زندانیان است. ما این فرآیند را با استفاده از ساختار داده مجموعه‌های مجزا مدل‌سازی می‌کنیم. هر "مجموعه" نشان‌دهنده یک گروه از زندانیان است که یک نقشه مشترک دارند و از یک "رهبر" (نماینده مجموعه) پیروی می‌کنند.

نقشه قیام:

مرحله ۱: درست کردن سلول‌های اولیه (MakeSet)

در ابتدای کار، هیچ‌کس به دیگری اعتماد ندارد. هر زندانی یک گروه تک‌نفره برای خودش است. بنابراین، ما n عملیات $\text{MakeSet}(p_i)$ برای تمام زندانیان از $i = 1$ تا n انجام می‌دهیم.

مرحله ۲: اتحاد استراتژیک (Union)

رزنوف یک برنامه دقیق برای اتحاد گروه‌ها دارد. این اتحاد در $k = \log_2 n$ دور انجام می‌شود:

- دور اول: زندانیان دو به دو با هم متحد می‌شوند. یعنی عملیات‌های $\text{Union}(p_1, p_2), \text{Union}(p_3, p_4), \dots, \text{Union}(p_{n-1}, p_n)$ انجام می‌شود. در این مرحله $n/2$ گروه دو نفره تشکیل می‌شود.
- دور دوم: رهبران گروه‌های مجاور با هم متحد می‌شوند. برای مثال، گروهی که p_1 و p_2 در آن هستند با گروهی که p_3 و p_4 در آن هستند متحد می‌شوند. این یعنی انجام عملیات‌های $\text{Union}(p_1, p_3), \text{Union}(p_5, p_7)$ و الی آخر. (توجه کنید که $\text{Union}(p_1, p_3)$ در واقع به معنای $\text{Union}(\text{Find}(p_1), \text{Find}(p_3))$ است). در این مرحله $n/4$ گروه چهار نفره تشکیل می‌شود.
- این روند ادامه می‌یابد تا در دور k -ام، دو گروه بزرگ $n/2$ نفره با هم متحد شده و در نهایت تمام n زندانی تحت یک رهبری واحد قرار گیرند.

قانون اتحاد: برای قابل پیش‌بینی بودن ساختار، یک قانون ساده برای اتحاد وجود دارد: در هر عملیات $\text{Union}(x, y)$ ، همیشه گروه با نماینده (رهبر) با شماره کوچکتر، به گروه با نماینده با شماره بزرگتر می‌پیوندد.

مرحله ۳: بازجویی نهایی (Find)

پس از اینکه همه زندانیان متحد شدند و قیام به اوج خود رسید، فرمانده اردوگاه دراگوویچ، برای شناسایی رهبر اصلی، تمام زندانیان را یک به یک بازجویی می‌کند تا بفهمد رهبر نهایی آن‌ها کیست. این یعنی ما عملیات $\text{Find}(p_i)$ را برای تمام زندانیان از $i = 1$ تا n انجام می‌دهیم.

در هنگام کشیدن نقشه قیام میسون از رزنوف سوال میکنه که با چه ساختاری نقشه رو بکشیم 😊

در جواب رزنوف میگه که ما همه برادریم و تاکتیک هایی برای این موضوع داریم

سوال : براساس نقشه قیام رزنوف ، تمام تکنیک های رزنوف رو بخونید و بگید ساختار نهایی و پیچیدگی زمانی کل برای اجرای هر سه مرحله روی هم ، در هر یک از تاکتیک های زیر چقدر است ؟ تحلیل خود را بنویسید .

تاکتیک اول : زنجیره ارتباطی خطی

در این تاکتیک، هر گروه مانند یک صف خطی از زندانیان است. وقتی دو گروه متحد می‌شوند، نفر اول گروه کوچکتر، به نفر آخر گروه بزرگتر زنجیر می‌شود و تک تک اعضای گروه کوچکتر باید رهبر جدید را به خاطر بسپارند.

تاکتیک دوم : زنجیره هوشمند بر اساس جمعیت

مثل حالت قبل ارتباطات خطی است، اما رزنوف دستور داده برای کاهش سردرگمی، همیشه گروهی که جمعیت کمتری دارد به انتهای گروه پرجمعیت‌تر متصل شود تا افراد کمتری مجبور به تغییر نام رهبر نهایی خود باشند.

تاکتیک سوم : تاکتیک سلسله‌مراتب درختی

در این روش، یک سیستم سلسله‌مراتب (جوجه کمونیستی!) شکل می‌گیرد. وقتی دو گروه متحد می‌شوند، رهبر گروه اول مستقیماً به عنوان زیردست رهبر گروه دوم قرار می‌گیرد. هیچ‌کس تلاش نمی‌کند این زنجیره فرماندهی را کوتاه کند و پیام‌ها باید دست به دست تا رهبر اصلی بالا برود

تاکتیک چهارم : تاکتیک شبکه اطلاعاتی بهینه‌شده رزناف

شاهکار رزناف! در هنگام اتحاد، همیشه رهبری که زیردستان درختی کمتری دارد به رهبر قدرتمندتر می‌پیوندد. (Rank) مهم‌تر از آن، در مرحله بازجویی نهایی (Find)، هر زندانی وقتی متوجه می‌شود رهبر اصلی کیست، بلافاصله واسطه‌ها را دور زده و برای ارتباطات بعدی، خودش را مستقیماً به عنوان زیردست مستقیم رهبر اصلی معرفی می‌کند. (Path Compression)

سوال چهارم :

الگوریتم QuickSort را بر روی n عنصر متمایز در نظر بگیرید.

الگوریتم در هر مرحله، محور (pivot) را بطور یکنواخت و تصادفی از زیرآرایه انتخاب می‌کند.

الگوریتم مبتنی بر مقایسه است.

بخش الف. ساخت درخت برای $n=4$

۱. فرض کنید QuickSort همیشه عنصر میانی (median) را به عنوان pivot انتخاب کند.

الف) درخت تصمیم متناظر برای مرتب‌سازی ۴ عنصر متمایز را رسم کنید.
ب) ارتفاع این درخت را تعیین کنید.
ج) در بدترین حالت چند مقایسه انجام می‌شود؟ محاسبه کنید.

۲. حالتی را در نظر بگیرید که pivot همیشه کوچک‌ترین عنصر انتخاب شود.

الف) شکل کلی درخت تصمیم را توضیح دهید.
ب) تعداد مقایسه‌ها را برای $n=4$ محاسبه کنید.
ج) مرتبه زمانی این حالت را بر حسب n بیان کنید.

بخش ب. رفتار تصادفی

اکنون فرض کنید pivot به طور یکنواخت و تصادفی انتخاب می‌شود.

1. توضیح دهید چرا QuickSort متناظر با یک درخت تصمیم دودویی تصادفی است.
2. فرض کنید X عمق یک عنصر انتخاب شده بطور تصادفی در درخت بازگشتی باشد
الف) به صورت شهودی توضیح دهید چرا امید ریاضی عمق برابر با $O(\log n)$ است.
ب) ارتباط این نتیجه را با ساختار درخت جستجوی دودویی تصادفی توضیح دهید.